

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Механико-математический факультет

УТВЕРЖДАЮ:

Декан



Л. В. Гензе

« 30 » 08 20 22 г.

Рабочая программа дисциплины

**Дополнительные главы функционального анализа**

по направлению подготовки

**01.04.01 Математика**

Направленность (профиль) подготовки :

**Математический анализ и моделирование (Mathematical Analysis and Modelling)**

Форма обучения

**Очная**

Квалификация

**Магистр**

Год приема

**2022**

Код дисциплины в учебном плане: Б1.В.2.ДВ.01.01

СОГЛАСОВАНО:

Руководитель ОП



А.В. Старченко

Председатель УМК



Е.А. Тарасов

Томск – 2022

## **1. Цель и планируемые результаты освоения дисциплины**

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1 Способен формулировать и решать актуальные и значимые проблемы математики.

ПК-1 Способен самостоятельно решать исследовательские задачи в рамках реализации научного (научно-технического, инновационного) проекта.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК 1.1 Формулирует поставленную задачу, пользуется языком предметной области, обоснованно выбирает метод решения задачи.

ИПК 1.1 Проводит исследования, направленные на решение отдельных исследовательских задач

## **2. Задачи освоения дисциплины**

Изучение классических основ теории меры и теории пространств Лебега и Соболева. Данная дисциплина посвящена в основном изучению теории пространств Соболева и ее приложений к задачам математической физике.

## **3. Место дисциплины в структуре образовательной программы**

Дисциплина относится к Блоку 1 «Дисциплина (модули)».

Дисциплина относится к части образовательной программы, формируемой участниками образовательных отношений, предлагается обучающимся на выбор.

## **4. Семестр(ы) освоения и форма(ы) промежуточной аттестации по дисциплине**

Первый семестр, экзамен

## **5. Входные требования для освоения дисциплины**

Для успешного освоения дисциплины требуются компетенции, сформированные в ходе освоения образовательных программ предшествующего уровня образования.

## **6. Язык реализации**

Русский

## **7. Объем дисциплины**

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 з.е., 144 часов, из которых:

-лекции: 32 ч.

Объем самостоятельной работы студента определен учебным планом.

## **8. Содержание дисциплины, структурированное по темам**

Тема 1. Системы множеств.

Кольца, алгебры,  $\sigma$ -кольца и  $\sigma$ -алгебры множеств; существование  $\sigma$ -алгебры, порожденной классом множеств. Борелевская  $\sigma$ -алгебра.

Тема 2. Продолжение меры по Лебегу.

Внешняя мера Лебега. Измеримое множество. Мера Лебега.

Тема 3. Интеграл Лебега.

Измеримые функции и их свойства. Сходимости почти всюду и по мере. Определение и основные свойства интеграла Лебега. Определение пространств  $L_p$ .

Тема 4. Пространства Соболева.  
Классические пространства Соболева. Теоремы вложения. Элементы геометрической теории меры.

### 9. Текущий контроль по дисциплине

Текущий контроль по дисциплине проводится путем контроля посещаемости, проведения контрольных работ, опроса по лекционному материалу, выполнения домашних заданий и фиксируется в форме контрольной точки не менее одного раза в семестр.

### 10. Порядок проведения и критерии оценивания промежуточной аттестации

Экзамен в первом семестре проводится в письменной форме по билетам. Экзаменационный билет содержит два теоретических вопроса и задачу. Продолжительность экзамена 1,5 часа.

#### Список теоретических вопросов

1. Системы множеств (полукольца, кольца, алгебры,  $\sigma$ -алгебры.). Примеры.
2. Меры на полукольцах и на кольцах. Примеры. Продолжение меры с полукольца на минимальное кольцо. Свойства мер. Полнота мер.
3. Внешняя мера Лебега и ее свойства. Измеримые множества.
4. Мера Лебега и корректность ее определения. Счётная аддитивность меры Лебега.
5. Теорема о структуре измеримых множеств.
6. Измеримые функции. Элементарные свойства измеримых функций.
7. Сходимость почти всюду. Сходимость по мере. Теоремы Егорова и Лузина (без док-ва).
8. Интеграл Лебега для простых функций и его свойства.
9. Определение интеграла Лебега в общем случае. Базовые свойства интеграла Лебега.
10. Свойства интеграла Лебега как функции множества. Неравенство Чебышёва.
11. Теорема Лебега о предельном переходе.
12. Теорема Б. Леви о предельном переходе. Теорема Фату.
13. Прямые произведения мер.
14. Неравенства Гёльдера и Минковского. Пространства  $L_p$ .
15. Понятие обобщенной функции. Примеры.
16. Определение пространства Соболева, основные свойства.
17. Аппроксимация гладкими функциями.
18. Теоремы вложения пространств  $W_p^k$ .

#### Примерный список задач.

1. Приведите пример компактного множества  $X \subset R$ , граница которого имеет положительную меру Лебега.
2. Исследовать на измеримость функцию  $f(x) = \frac{1}{x(x-1)}$  на  $[0, 1]$ .
3. Показать, что при  $p = kn > 1$  функции из класса Соболева  $W_p^k$  не обязаны быть ограниченными. Здесь  $n$  размерность арифметического пространства.

При ответе на вопросы теста оценивается полнота и точность ответа, логичность и аргументированность изложения материала, умения использовать в ответе фактический материал. Для выставления текущей успеваемости при контроле СРС рекомендуется использовать следующую таблицу.

Оценка результатов контроля СРС	Критерии соответствия
отлично	Дан правильный и развернутый ответ на вопрос. Студент четко и логично изложил свой ответ на поставленный в тесте вопрос.
хорошо	Дан правильный ответ на вопрос, но не все изложено развернуто и логически структурировано.
удовлетворительно	В целом дан правильный ответ на вопрос, но он изложен поверхностно и с нарушением логики изложения.
неудовлетворительно	<p>Ответ представлен очень поверхностно и с нарушением логики изложения. Студент очень плохо владеет основными моделями и концепциями.</p> <p>Допущены существенные терминологические и фактические ошибки.</p> <p>Дан неправильный ответ, однозначно неправильное понимание вопроса на экзамене.</p>

### 11. Учебно-методическое обеспечение

а) Электронный учебный курс по дисциплине в электронном университете «Moodle» - <https://moodle.tsu.ru/course/view.php?id=6766>

б) Оценочные материалы текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине.

### 12. Перечень учебной литературы и ресурсов сети Интернет

а) основная литература:

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., Наука, 1981, 1989.
2. Дьяченко М.И., Ульянов П.Л. Мера и интеграл. М., Факториал, 1998, 2002
3. Богачев В.И., Смолянов О.Г., Действительный и функциональный анализ: университетский курс. Москва-Ижевск, РХД, 2009.
4. Ульянов П.Л. и др., Действительный анализ в задачах, М., Физматлит, 2005.
5. Мазья В.Г. Пространства Соболева. Ленинград, Ленинградский ун-т, 1985.

б) дополнительная литература:

1. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. М., Наука, 1979; СПб., Лань, 2008.
2. Богачев В.И., Основы теории меры, Т.1. Москва-Ижевск, РХД, 2003, 2006.
3. Гелбаум Б., Олмстед Дж., Контрпримеры в анализе. М., ЛКИ, 2007.
4. Халмош П., Теория меры. М., ИЛ, 1953. 5. Окстоби Дж., Мера и категория. М., ЛКИ, 2008.

### 13. Перечень информационных технологий

а) лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение: Специальное программное обеспечение не требуется.

б) информационные справочные системы:

- Электронный каталог Научной библиотеки ТГУ –  
<http://chamo.lib.tsu.ru/search/query?locale=ru&theme=system>
- Электронная библиотека (репозиторий) ТГУ –  
<http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Index>
- ЭБС Лань – <http://e.lanbook.com/>
- ЭБС Консультант студента – <http://www.studentlibrary.ru/>
- Образовательная платформа Юрайт – <https://urait.ru/>

#### **14. Материально-техническое обеспечение**

Аудитории для проведения занятий лекционного типа.

Аудитории для проведения занятий семинарского типа, индивидуальных и групповых консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации.

#### **15. Информация о разработчиках**

Доцент ММФ ТГУ, к.ф.-м.н. Пчелинцев Валерий Анатольевич.