

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Физический факультет

УТВЕРЖДЕНО:
Декан физического факультета
С.Н. Филимонов

Оценочные материалы по дисциплине

Дифференциальные уравнения

по направлению подготовки

03.03.02 Физика

Направленность (профиль) подготовки:
«Медицинская и биологическая физика»

Форма обучения
Очная

Квалификация
Бакалавр

Год приема
2025

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
В.П. Демкин

Председатель УМК
О.М. Сюсина

Томск – 2025

1. Цель и планируемые результаты освоения дисциплины (модуля)

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

– ОПК 1 – Способен применять базовые знания в области физико-математических и (или) естественных наук в сфере своей профессиональной деятельности.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК 1.1 – Знает основные законы, модели и методы исследования физических процессов и явлений

ИОПК 1.2 – Применяет физические и математические модели и методы при решении теоретических и прикладных задач

2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания

Элементы текущего контроля: контрольная работа (ИОПК 1.1, ИОПК 1.2).

По дисциплине «Дифференциальные уравнения» предусмотрена одна контрольная работа (ИОПК 1.1, ИОПК 1.2) по теме «Интегрирование различных типов дифференциальных уравнений первого порядка» продолжительностью один академический час.

Пример билетов контрольной работы.

Вариант 1

1. $2x\sqrt{1-y^2}dx + ydy = 0$, $y(1) = 0$; 2. $xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y$;
3. $x^2y' - y = x^2e^{x-1/x}$, $y(1) = 2$; 4. $(2x^2y - 2x^3)y' + 2xy^2 - 6x^2y + 4x^3 = 0$;
5. $y' + 4x^3y^3 + 2xy = 0$; 6. $\left(\frac{2y}{x} + \frac{3y^2}{x^2}\right)dx + \left(1 + \frac{6y}{x} - \frac{3y^2}{x^2}\right)dy = 0$;
7. $y'^2 - yy' + e^x = 0$; 8. $y = xy' - a\sqrt{1 + y'^2}$.

Вариант 2

1. $(xy + x)y' - y(x^2 + 1) = 0$, $y(1) = 1$; 2. $\left(1 - \frac{y}{x \ln^2 x}\right)dx + \frac{dy}{\ln x} = 0$;
3. $(y^4 e^y + 2x)y' = 1$; 4. $y'^2 - 4xy' + 2y + 2x^2 = 0$;
5. $(x^2 + 2xy - y^2)dx + (y^2 + 2xy - x^2)dy = 0$; 6. $xy' + y = xy^2$;
7. $\left(y^2 e^x + \frac{y^2}{x}\right)dx + (y - 2y^3)dy = 0$; 8. $y = xy' + \frac{1}{y'}$.

Критерии оценивания: результаты каждой контрольной работы определяются оценками по четырех бальной системе. Оценка «отлично» выставляется, если студент правильно определяет тип всех предложенных ему дифференциальных уравнений и приводит правильные решения не менее трех из них. Оценка «хорошо» выставляется, если в предъявляемом решении имеется не более двух ошибок и идея решения всех задач правильная. Оценка «три» выставляется, если студент не может правильно определить тип более, чем трех дифференциальных уравнений, а в представленных решениях имеются ошибки. В противном случае выставляется оценка «неудовлетворительно».

3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания

Промежуточная аттестация проводится в форме устного зачета с оценкой. Каждый экзаменационный билет состоит из двух теоретических вопросов и практического задания по последним темам дисциплины (ДУ высших порядков, линейные уравнения и системы линейных ДУ). Примеры билетов приведены ниже.

Билет №

1. Теорема Пикара существования и единственности для системы нормальной формы (док-во пункта 2).
2. Теоремы о вронскиане для линейных ДУ.

Билет №

1. Теорема существования и единственности для ДУ n – го порядка.
2. Первые интегралы системы ДУ, теоремы о первых интегралах.

Билет №

1. Зависимость решения задачи Коши от начальных данных и параметров.
2. Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных для ДУ.

Критерии оценивания компетенций для дисциплины «Дифференциальные уравнения» основывается на бальной системе:

- - оценка «отлично» выставляется студенту, если студент ответил на оба вопроса, дал исчерпывающие ответы, привел полное доказательство каждого утверждения, смог ответить на дополнительные вопросы по материалу, вынесенному на зачет;
- - оценка «хорошо» выставляется студенту, если студент ответил на оба вопроса, привел полное доказательство каждого утверждения с помощью наводящих вопросов, смог ответить на дополнительные вопросы по материалу, вынесенному на зачет;
- - оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если студент ответил на один из вопросов билета, сформулировал все основные определения и теоремы, входящие в оба вопроса билета, смог ответить на дополнительные вопросы по основному материалу, вынесенному на зачет;
- - оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если студент не смог ответить на оба вопроса, не смог ответить на основные вопросы по материалу, вынесенному на зачет.

Открытый перечень вопросов, выносимых на экзамен в 3 семестре.

1. Основные понятия теории дифференциальных уравнений. Поле направлений, изоклины. Интегральные кривые. Задача Коши. Геометрическая интерпретация. Частное решение, общее решение, особое решение, общий интеграл.
2. Различные типы уравнений 1-го порядка, разрешённых относительно производной: уравнения с разделяющимися переменными, однородные уравнения, линейные ДУ первого порядка, уравнения Бернулли, уравнения Риккати.
3. Уравнение в полных дифференциалах.
4. Интегрирующий множитель. Частные случаи нахождения интегрирующего множителя. Теоремы об интегрирующем множителе.

5. Уравнения 1-го порядка, неразрешённые относительно производной. Постановка задачи Коши, теорема существования и единственности.
6. Параметрический метод.
7. Уравнения Лагранжа и Клеро.
8. Уравнения высших порядков. Постановка задачи Коши. Теорема существования и единственности. Понятие о краевых задачах.
9. Уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка.
10. Линейные дифференциальные уравнения, основные свойства.
11. Понятия линейно независимых функций. Примеры.
12. Вронскиан. Теоремы о вронскиане, формула Остроградского-Лиувилля.
13. Фундаментальная система решений. Теорема о фундаментальной системе решений.
14. Теорема об общем решении линейного однородного уравнения.
15. Теорема об общем решении линейного неоднородного уравнения.
16. Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных.
17. Понижение порядка линейного однородного и линейного неоднородного ДУ.
18. Линейные ДУ с постоянными коэффициентами, построение фундаментальной системы.
19. Метод подбора частного решения.
20. Уравнения Эйлера.
21. Нормальная форма системы ДУ. Сведение общей системы ДУ к нормальной.
22. Системы линейных ДУ – теоремы о вронскиане, о фундаментальной системе решений, об общем решении, метод Лагранжа.
23. Системы линейных ДУ с постоянными коэффициентами.
24. Сведение системы ДУ к одному уравнению более высокого порядка.
25. Первые интегралы системы, теорема о необходимых и достаточных условиях первого интеграла.
26. Симметричная форма системы ДУ.
27. Линейные однородные ДУ в частных производных первого порядка. Задача Коши.
28. Квазилинейные ДУ в частных производных. Задача Коши.
29. Теорема Пикара о существовании и единственности решения системы нормальной формы. Метод последовательных приближений.
30. Теорема существования и единственности для ДУ первого порядка, не разрешённого относительно производной.
31. Теорема существования и единственности для уравнений n -го порядка.
32. Теоремы существования и единственности для случаев области, не ограниченной по искомым функциям и неограниченной по всем переменным.
33. Теоремы существования и единственности для линейных уравнений n -го порядка и систем линейных ДУ.
34. О продолжении решения, определяемого теоремой Пикара.
35. Зависимость решения задачи Коши от начальных данных и параметров.

4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

Теоретические вопросы и задачи (ИОПК 1.1, ИОПК 1.2):

1. Какие из приведенных ниже ДУ являются обыкновенными дифференциальными уравнениями? а) $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$; б) $y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = x$; в) $x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$;

1. г) $dx + \frac{y^2}{x} dy = 0$; д) $y''^2 + y' = xy''$.

2. Среди перечисленных ДУ уравнениями в частных производных являются...

а) $xe^y dx - y \ln x dy = 0$; б) $2\sqrt{x} \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$;

в) $\operatorname{tg} x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z$; г) $y'' + 4y = 2 \sin x$; д) $2xy dx + (x^2 - y^2) dy = 0$.

3. Сколько произвольных постоянных содержит общее решение ДУ

$xy''' - y'' = x^2 + y$?

4. Среди перечисленных ДУ 1-го порядка уравнениями, разрешёнными относительно производной, являются... а) $y'^3 - 3y' + 1 = 0$; б) $xy' - y = \cos x$;

в) $xy' = y^2 - 3y + 4x^2 + 2$;

г) $y = \frac{xy'}{2} + \frac{y'^2}{x^2}$; д) $(x + y) dx + (x - y) dy = 0$.

5. Как ставится задача Коши для ДУ $F(x, y, y') = 0$?

6. Из перечисленных ДУ уравнениями с разделяющимися переменными являются...

а) $x^2 y' + xy + x^2 y^2 = 4$; б) $x(y'^2 + e^{2y}) = -2y'$;

в) $2xy' + y^2 = 1$; г) $2xy' - y = \ln y'$; д) $y' \operatorname{ctg} x + y = 2$.

7. Из перечисленных ДУ первого порядка линейными являются...

а) $y' = \frac{y}{3x - y^2}$; б) $y = x(y' - x \cos x)$;

в) $(x - y) dx + (x + y) dy = 0$; г) $\sqrt{y^2 + 1} dx + xy dy = 0$; д) $y' + y \operatorname{tg} x = \sec x$.

8. Решением задачи Коши $xdy + ydx = 0$, $y(1) = 2$ является...

Варианты ответов: а) $xy = 1$; б) $xy = 2$; в) $xy = \frac{1}{2}$; г) $y = 2x$.

9. Выбрать из данных ДУ уравнения в полных дифференциалах:

а) $(2x^2 y - 2x^3) y' + 2xy^2 - 6x^2 y + 4x^3 = 0$; б) $xy' = y + x \left(1 + e^{\frac{y}{x}}\right)$;

в) $x = y'^2 + \ln y'$; г) $y' = xe^{2y-x}$; д) $x^2(3y + 2x)y' + 3x(y + x)^2 = 0$.

10. Для ДУ $yy'' = y'^2$ первым интегралом является... а) $y' = \frac{C_1}{y}$; б) в) $y' = C_1 y$.

11. Установить соответствие между линейным ДУ и отвечающим ему характеристическим уравнением: 1) $y'' + 4y = 0$; 2) $y'' + 6y' + 10y = 0$;

3) $y''' - y'' - y' + y = 0$; 4) $y'' - 3y' + 2y = 0$.

Ответы: а) $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$; б) $\lambda^2 + 6\lambda + 10 = 0$; в) $\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$;

г) $\lambda^2 + 4 = 0$.

12. Сколько функций должна содержать фундаментальная система решений уравнения: $y''' - y'' - y' + y = 0$?

13. Для ДУ $y'' + 4y' + y = 0$ ФСР является...

14. Решить ДУ: $y'' + 3y' = 0$.

15. Для каких из приведённых ниже линейных неоднородных ДУ частное решение можно найти только методом Лагранжа вариации произвольных постоянных, а для каких и методом подбора (методом неопределённых коэффициентов):

1) $y'' + y = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$; 2) $y'' + y = \sin x \cos 3x$; 3) $y'' + 4y = \sin^2 2x$;

4) $y'' - y = 4\sqrt{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}}$; 5) $y'' - 2y' + y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x^3}$?

16. Выбрать из данных систем ДУ систему нормальной формы:

а) $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$; б) $\begin{cases} x'' = 2y \\ y'' = -2x \end{cases}$; в) $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{z}$.

17. Записать характеристическую систему для данного ДУ: $y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = x$.

18. Если $\psi_1 = e^{-2x}(y + z)$, $\psi_2 = e^{-x}(3y + 2z)$ есть независимые первые интегралы характеристической системы ДУ в частных производных

$\frac{\partial u}{\partial x} - (y + 2z) \frac{\partial u}{\partial y} + (3y + 4z) \frac{\partial u}{\partial z} = 0$, то его общее решение имеет вид...

1) $F(e^{-2x}(y + z), e^{-x}(3y + 2z)) = 0$; 2) $u = f(e^{-2x}(y + z), e^{-x}(3y + 2z))$.

5. Информация о разработчиках

Галанова Наталья Юрьевна, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедры общей математики механико-математического факультета ТГУ, доцент;

Лазарева Елена Геннадьевна, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедры общей математики механико-математического факультета ТГУ, доцент;

Путятин Елена Николаевна, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедры общей математики механико-математического факультета ТГУ, доцент.