

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Физико-технический факультет

УТВЕРЖДЕНО:

Декан

Ю.Н. Рыжих

Оценочные материалы по дисциплине

Основы вариационного исчисления

по направлению подготовки

15.03.06 Мехатроника и робототехника

Направленность (профиль) подготовки:
Промышленная и специальная робототехника

Форма обучения

Очная

Квалификация

Инженер, инженер-разработчик

Год приема

2025

СОГЛАСОВАНО:

Руководитель ОПОП

Е.И. Борзенко

Председатель УМК

В.А. Скрипняк

Томск – 2025

1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1 Способен использовать в профессиональной деятельности основные законы естественнонаучных и инженерных дисциплин, применять методы математического моделирования, теоретических и экспериментальных исследований

ОПК-2 Способен выявлять естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, привлекать для их решения физико-математический аппарат и современные компьютерные технологии

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

РООПК-1.1 Знает фундаментальные законы природы и основные физические и математические законы

РООПК-1.2 Умеет применять физические законы и математические методы для решения задач теоретического и прикладного характера

РООПК-2.1 Знает методику выявления естественнонаучной сущности проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, и методику привлечения физико-математического аппарата и современные компьютерных технологий для их решения

РООПК-2.2 Умеет выявлять естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности и привлекать для их решения физико-математический аппарат и современные компьютерные технологии

2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания

Элементы текущего контроля:

– контрольная работа;

Контрольная работа (РООПК-1.1, РООПК-1.2, РООПК-2.1, РООПК-2.2)

Контрольная работа состоит из 3 задач.

Билет 1

1) Решить простейшую вариационную задачу

$$J(y) = \int_1^2 (y')^2 + \frac{6y^2}{x^2} - 32 \ln x \, dx, \quad y(1) = 3, \quad y(2) = 4(4 \ln 2 + 3).$$

2) Решить изопериметрическую задачу $J(y) = \int_0^p (y')^2 \, dx, \quad y(0) = 0, \quad y(p) = p, \quad \int_0^p y \sin x \, dx = 0.$

3) Решить задачу со свободными условиями $J(y) = \int_0^1 2yy' + (y')^2 \, dx.$

Билет 2

1) Решить простейшую вариационную задачу

$$J(y) = \int_1^2 (y')^2 + 2y^2 + 32x^2 y \ln x \, dx, \quad y(1) = -5, \quad y(2) = 4(4 \ln 2 - 5).$$

2) Найти экстремали функционала $\int_0^p xy' + y' + y^2 \, dx, \quad y(0) = 0; \quad y'(0) = 0; \quad y(p) = 1; \quad y'(p) = 1.$

3) Решить задачу с подвижной границей. В ответе указать минимальное значение

функционала. $J(y) = \int_0^b \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{y} \, dx, \quad y(0) = 0, \quad y(b) = b.$

Билет 3

- 1) Решить простейшую вариационную задачу $J(y) = \int_1^2 (y')^2 + 2yy' dx$, $y(1) = 0$, $y(2) = \ln 2$.
- 2) Решить изопериметрическую задачу
 $J(y) = \int_0^p (y')^2 + y^2 + 2y \cos x dx$, $y(0) = 0$, $y(p) = -2$, $\int_0^p y \cos x dx = p$.
- 3) Найти кратчайшее расстояние от точки $A(-1, 2)$ до параболы $y = x^2$.

Билет 4

- 1) Решить простейшую вариационную задачу
 $J(y) = \int_{p/4}^{p/2} 0.5(y')^2 + y \sin x dx$, $y(p/4) = -\ln \sqrt{2}$, $y(p/2) = 0$.
- 2) Найти экстремали функционала $\int_0^p (y')^2 - y^2 dx$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$; $y(p) = \operatorname{sh} p$; $y'(p) = \operatorname{ch} p$.
- 3) Решить задачу со свободными условиями $J(y) = \int_0^1 (y')^2 + 2y \cos x + (y')^2 dx$.

Билет 5

- 1) Решить простейшую вариационную задачу
 $J(y) = \int_0^1 0.5e^x (y')^2 + (1+x)e^x y dx$, $y(0) = 1$, $y(1) = 1.5$.
- 2) Решить изопериметрическую задачу
 $J(y) = \int_0^p (y')^2 + 2y + 3y \sin x dx$, $y(0) = 0$, $y(p) = p^2$, $\int_0^p y \sin x dx = p^2 - 1$.
- 3) Решить задачу с подвижной границей. В ответе указать минимальное значение функционала. $J(y) = \int_0^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$, $y(0) = 0$, $b^2 y(b) = 1$.

Критерии оценивания:

Результаты контрольной работы определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Оценка «отлично» выставляется, если все три задачи решены без ошибок.

Оценка «хорошо» выставляется, если две задачи из трех решены без ошибок.

Оценка «удовлетворительно» выставляется, если одна задача из трех решено без ошибок.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если не решены задачи, или решены с ошибками.

3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания

Зачет в седьмом семестре проводится в устной форме.

Перечень вопросов к зачету:

1. Исследование функции нескольких переменных на экстремум. Достаточное условие экстремума функции многих переменных.
2. Определение функционала. Примеры формулировок задач, приводящих к вариационным задачам на нахождение экстремума функционала.

3. Понятие «малости» изменения $y(x)$. Малость 1-го порядка, малость n-го порядка.
4. Понятие вариации функционала.
5. Вывод уравнения Эйлера. Уравнение Эйлера в общем виде и в развернутом виде.
6. Основная лемма вариационного исчисления.
7. Частные случаи уравнения Эйлера. Функция F не зависит от y' . Функция F линейно зависит от y' . Функция F зависит только от y' .
8. Частные случаи уравнения Эйлера. Функция F зависит только от x и y' . Функция F зависит только от y и y' .
9. Вариационные задачи в параметрической форме.
10. Функционалы, зависящие от производных высшего порядка. Вывод уравнение Эйлера-Пуассона.
11. Функционалы, зависящие от m функций. Система уравнений Эйлера.
12. Простейшая вариационная задача с подвижными границами. Вывод условия трансверсальности.
13. Вариационные задачи на условный экстремум. Метод решения.
14. Изопериметрическая задача. Метод решения.
15. Экстремали с угловыми точками.
16. Односторонние вариации.
17. Прямые численные методы вариационного исчисления. Конечно-разностный метод Эйлера.
18. Постановка вариационной задачи с подвижными границами. Метод решения.
19. Постановка и решение задачи о геодезическом расстоянии.
20. Постановка и решение задачи о минимальной поверхности вращения.
21. Постановка и решение задачи о минимальном расстоянии от точки до кривой.
22. Постановка и решение задачи о брахистохроне.
23. Постановка и решение задачи Дидоны (изопериметрическая задача).
24. Постановка и решение задачи о форме тела с наименьшим сопротивлением.

Перечень вопросов к эзачету составлен с учетом, что они содержат проверку освоения компетенций ОПК-1, ОПК-2, (индикаторы достижения компетенции РООПК-1.1, РООПК-1.2, РООПК-2.1, РООПК-2.2) обучающимся.

Билет к зачету состоит из двух вопросов из перечня.

Примеры билетов к зачету:

Билет № 1

1. Исследование функции нескольких переменных на экстремум. Достаточное условие экстремума функции многих переменных.
2. Постановка и решение задачи Дидоны.

Билет № 2

1. Определение функционала. Примеры формулировок задач, приводящих к вариационным задачам на нахождение экстремума функционала.
2. Постановка и решение задачи о брахистохроне.

Билет № 3

1. Понятие «малости» изменения $y(x)$. Малость 1-го порядка, малость n-го порядка.
2. Постановка и решение задачи о минимальном расстоянии от точки до кривой.

Билет № 4

1. Понятие вариации функционала.
2. Постановка и решение задачи о минимальной поверхности вращения.

Билет № 5

1. Вывод уравнения Эйлера. Уравнение Эйлера в общем виде и в развернутом виде.
2. Постановка и решение задачи о геодезическом расстоянии.

Билет № 6

1. Основная лемма вариационного исчисления.
2. Постановка и решение задачи Дидоны (изопериметрическая задача).

Билет № 7

1. Частные случаи уравнения Эйлера. Функция F не зависит от y' . Функция F линейно зависит от y' . Функция F зависит только от y' .
2. Постановка и решение задачи о форме тела с наименьшим сопротивлением.

Критерии оценивания:

Результаты зачета определяются оценками «зачтено», «незачтено»

Оценка «зачтено» выставляется, если даны правильные ответы на все вопросы экзаменационного билета, возможно с небольшими недочетами

Оценка «незачтено» выставляется, если даны неправильные ответы на все вопросы экзаменационного билета

4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

Перечень вопросов для проверки остаточных знаний, сформированности компетенций:

1. Определение функционала. Примеры формулировок задач, приводящих к вариационным задачам на нахождение экстремума функционала.
2. Понятие вариации функционала.
3. Основная лемма вариационного исчисления.
4. Функционалы, зависящие от производных высшего порядка.
5. Функционалы, зависящие от n функций.
6. Простейшая вариационная задача с подвижными границами.
7. Вариационные задачи на условный экстремум.
8. Изопериметрическая задача.
9. Постановка задачи о геодезическом расстоянии.
10. Постановка задачи о минимальной поверхности вращения.
11. Постановка задачи о минимальном расстоянии от точки до кривой.
12. Постановка задачи о брахистохроне.
13. Постановка задачи Дидоны (изопериметрическая задача).
14. Постановка задачи о форме тела с наименьшим сопротивлением.

Критерии оценивания: верный, развернутый ответ или содержащий незначительные фактические неточности на любой один теоретический вопрос из списка.

Информация о разработчиках

Крайнов Алексей Юрьевич, д.ф.-м.н., заведующий кафедрой математической физики ФТФ ТГУ