

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Институт прикладной математики и компьютерных наук

УТВЕРЖДЕНО:  
Директор  
А. В. Замятин

Оценочные материалы по дисциплине

Методы оптимизации и исследование операций

по направлению подготовки

**09.03.03 Прикладная информатика**

Направленность (профиль) подготовки:  
**Искусственный интеллект и большие данные**

Форма обучения  
**Очная**

Квалификация  
**Бакалавр**

Год приема  
**2025**

СОГЛАСОВАНО:  
Руководитель ОП  
С.П.Сущекно

Председатель УМК  
С.П.Сущекно

Томск – 2025

## 1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-6 Способен анализировать и разрабатывать организационно-технические и экономические процессы с применением методов системного анализа и математического моделирования.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК-6.1 Обладает понятиями и категориями математического моделирования, используемыми при расчете экономических и организационно-технических процессов

ИОПК-6.2 Использует методы системного анализа для выявления информационных потребностей пользователей

ИОПК-6.3 Выбирает методы моделирования систем, структурирует и анализирует цели и функции систем управления, проводит системный анализ прикладной области

## 2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания

Элементы текущего контроля:

- контрольная работа по выпуклому программированию;
- курсовой проект по сетевому планированию и управлению.

Контрольная работа (ИОПК-6.1, ИОПК-6.2, ИОПК-6.3) состоит из пяти задач. Пример варианта контрольной работы.

Задача 1. Найти стационарные точки функции  $f(x_1, x_2)$ , определить их тип согласно критерию Сильвестра и вычислить экстремальные значения функции

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 3x_2^2 - 5x_1x_2 + 2x_1 - x_2.$$

Задача 2. Составив функцию Лагранжа для функции  $f(x_1, x_2)$ , свести задачу условной оптимизации к задаче безусловной оптимизации и найти точки экстремума и экстремальные значения этой функции

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= 2x_1^2 + 3x_2^2 - 5x_1x_2 + 2x_1 - x_2, \\ x_1 + x_2 &= 3. \end{aligned}$$

Задача 3. Составить систему дифференциальных условий Куна – Таккера для следующей задачи выпуклого программирования

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 1)^2 \Rightarrow \min \\ 5x_1^2 + x_2 &\leq 10, \\ 0 \leq x_2 &\leq 7, \\ x_1 &\geq 0. \end{aligned}$$

Задача 4. Составить и решить систему дифференциальных условий Куна – Таккера для следующей задачи квадратичного программирования

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= (x_1 - 2)^2 + (x_2 + 3)^2 \Rightarrow \min \\ x_1 + x_2 &= 4, \\ x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Задача 5. Методом Вульфа свести задачу квадратичного программирования к задаче линейного программирования и применить симплекс-метод.

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^2 + x_2^2 \Rightarrow \min$$

$$2x_1 + x_2 \leq 6,$$

$$x_2 \leq 5,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Ответы:

Задача 1. (7; 6).

Задача 2. (3/2; 3/2; -1/2).

Задача 3.

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + 10x_1y_1 - 8 \geq 0, \\ x_1(2x_1 + 10x_1y_1 - 8) = 0, \\ x_1 \geq 0, \\ 2x_2 + y_1 + y_2 - 2 \geq 0, \\ x_2(2x_2 + y_1 + y_2 - 2) = 0, \\ x_2 \geq 0, \\ 5x_1^2 + x_2 - 10 \leq 0, \\ y_1(5x_1^2 + x_2 - 10) = 0, \\ y_1 \geq 0, \\ x_2 - 7 \leq 0, \\ y_1(x_2 - 7) = 0, \\ y_2 \geq 0. \end{array} \right.$$

Задача 4. (4; 0; -4).

Задача 5. (2; 0).

Критерии оценивания:

Результаты контрольной работы определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Оценка «отлично» выставляется, если верно решены 5 задач.

Оценка «хорошо» выставляется, если верно решены 4 задачи.

Оценка «удовлетворительно» выставляется, если верно решены 3 задачи.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если верно решены менее 3-х задач.

Курсовой проект по сетевому планированию (ИОПК-6.1, ИОПК-6.2, ИОПК-6.3) представляет собой задание, где студенту необходимо самостоятельно определиться с предметной областью проекта, составить сетевую модель проекта и исследовать её методом критического пути. Результаты защиты проекта оцениваются по двухбалльной системе «зачтено» или «не зачтено».

### 3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания

Формами промежуточной аттестации являются:

- зачёт (4 семестр);
- экзамен (5 семестр).

Зачет в четвертом семестре проводится в форме защиты выполненных лабораторных работ в течение семестра, а также прохождения итогового тестирования. в среде LMS Moodle. Продолжительность зачета 90 минут.

Экзамен в пятом семестре проводится по балльно-рейтинговой системе в форме защиты выполненных лабораторных работ в течение семестра, написания и защиты курсового проекта по сетевому планированию, выполнения контрольной работы по нелинейному программированию, что составляет 60% экзаменационной оценки, а также итоговой письменной работы (по билетам), что составляет 40% экзаменационной оценки. Продолжительность экзамена (итоговой письменной работы) – 90 минут.

Примеры вопросов к итоговому тесту (ИОПК-6.1, ИОПК-6.2, ИОПК-6.3) на зачёт (4 семестр):

1. Расположите в правильной последовательности действия в одной итерации симплексного метода.

- А) Проверка текущего опорного плана на оптимальность.
- Б) Выбор вектора, включаемого в базис.
- В) Выбор вектора, исключаемого из базиса.
- Г) Преобразование плана.

2. Как определить в симплексном методе, что задача линейного программирования не имеет решения по причине противоречивости условий?

- А) На некоторой итерации не удастся найти вектор, включаемый в базис.
- Б) На некоторой итерации не удастся найти вектор, исключаемый из базиса.
- В) Не удастся построить исходный опорный план.

3. Какими методами можно решить транспортную задачу?

- А) Симплексным методом.
- Б) Методом потенциалов.
- В) Венгерским методом.
- Г) Методом ветвей и границ.

4. Достаточно ли условия баланса для существования решения транспортной задачи или необходимы дополнительные условия?

- А) Да.
- Б) Нет.

5. Перечислите базовые принципы динамического программирования.

- А) Принцип многошаговости.
- Б) Принцип погружения.
- В) Принцип оптимальности.
- Г) Принцип отсечения.

Ответы:

- 1. а), б), в), г).
- 2. в).

3. а), б).
4. а).
5. а), б), в).

Тест считается пройденным, если студент ответил не менее, чем на 70% вопросов.

Экзаменационный билет состоит из четырёх частей.

Первая часть представляет собой теоретический вопрос (ИОПК-6.1, ИОПК-6.2, ИОПК-6.3) по курсу (список вопросов приведён ниже). Ответ на вопрос первой части дается в развернутой форме письменно и предполагает дополнительные вопросы преподавателя.

Вторая часть содержит задачу из раздела линейного программирования (ИОПК-6.1, ИОПК-1.2). Ответ на вопрос второй части дается в виде решения задачи письменно.

Третья часть содержит задачу из раздела нелинейного или сетевого программирования (ИОПК-6.2). Ответ на вопрос третьей части дается в виде решения задачи письменно.

Четвёртая часть содержит задачу из теории массового обслуживания (ИОПК-6.3). Ответ на вопрос четвёртой части дается в виде решения задачи письменно.

Перечень теоретических вопросов:

1. Методология операционного исследования.
2. Математическая модель задачи линейного программирования. Задача о производственном плане. Задача о диете. Каноническая форма.
3. Графическая интерпретация задачи линейного программирования.
4. Теория симплекс-метода. Свойства планов задачи линейного программирования.
5. Практический алгоритм симплексного метода. Метод искусственного базиса.
6. Симметричные и несимметричные двойственные задачи. Первая теорема двойственности.
7. Вторая теорема двойственности. Экономическая интерпретация двойственных переменных и двойственных условий.
8. Транспортная задача и её свойства. Методы построения исходных опорных планов.
9. Переход к новому опорному плану транспортной задачи. Критерий оптимальности плана транспортной задачи.
10. Задача о назначениях и её свойства. Независимые нули и паросочетания. Практический алгоритм венгерского метода.
11. Дискретное линейное программирование. Классификация задач и методов дискретного линейного программирования. Методы отсечения. Метод ветвей и границ.
12. Евклидово пространство. Выпуклые функции и их свойства. Классические задачи оптимизации.
13. Теорема Куна – Таккера. Дифференциальные условия Куна – Таккера и их геометрическая интерпретация.
14. Квадратичное программирование. Метод Вульфа.
15. Одномерная оптимизация. Локализация минимума. Минимизация унимодальных функций. Метод парабол. Метод касательных. Метод Ньютона.
16. Многомерная оптимизация без ограничений. Релаксационные методы. Градиентные методы.
17. Ньютоновские и квазиньютоновские методы многомерной оптимизации.
18. Многомерная оптимизация с ограничениями. Сведение к задаче без ограничений. Общая схема релаксационных методов, учитывающих ограничения.
19. Метод проектирования градиента.
20. Последовательное квадратичное программирование.

21. Метод линейной аппроксимации.
22. Метод секущих плоскостей.
23. Динамическое программирование. Основные принципы динамического программирования на примере задачи о кратчайшем пути.
24. Функция Беллмана. Уравнение Беллмана. Задача об инвестициях.
25. Сетевое планирование и управление. Проект и его сетевая модель. Временной анализ проектов.
26. Анализ проектов со случайными длительностями работ.
27. Предмет теории массового обслуживания. Случайные потоки и их свойства. Простейший поток.
28. Марковские процессы. Система дифференциальных уравнений Колмогорова.
29. Системы массового обслуживания с ожиданием.
30. Системы массового обслуживания с потерями.

Примеры задач:

Задача 1. Решить задачу линейного программирования графическим методом и симплекс-методом, сравнить результаты.

$$\begin{aligned}
 &2x_1 + 5x_2 \Rightarrow \min \\
 &x_1 + x_2 \geq 1, \\
 &x_1 + 2x_2 \leq 10, \\
 &2x_1 + x_2 \leq 10, \\
 &x_1 \geq 0, \\
 &x_2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

Задача 2. Фирма MIS, Inc. имеет 4 фабрики и 5 центров распределения ее товаров. Фабрики располагаются в Денвере, Бостоне, Нью-Орлеане, Далласе с производственными возможностями, соответственно, 200, 150, 225, 175 единиц продукции ежедневно. Распределительные центры располагаются в Лос-Анжелесе, Далласе, Сент-Луисе, Вашингтоне и Атланта с потребностями в 100, 200, 50, 250 и 150 единиц продукции ежедневно. Стоимость перевозки единицы продукции с фабрик в пункты распределения приведена в таблице ниже.

	Лос-Анжелес	Даллас	Сент-Луис	Вашингтон	Атланта	Производство
Денвер	1,5	2	1,75	2,25	2,25	200
Бостон	2,5	2	1,75	1	1,5	150
Нью-Орлеан	2	1,5	1,5	1,75	1,75	225
Даллас	2	0,5	1,75	1,75	1,75	175
Потребность	100	200	50	250	150	

Необходимо так спланировать перевозки, чтобы минимизировать суммарные транспортные расходы.

Задача 3. Имеются 4 рабочих и 5 видов работ. Стоимость  $c_{ij}$  выполнения  $i$ -м рабочим  $j$ -ой работы приведена в таблице, где под строкой понимается рабочий, а под столбцом работа. Необходимо составить план работ так, чтобы все работы были выполнены, каждый рабочий был занят только на одной работе, а суммарная стоимость выполнения всех работ была бы минимальной.

Рабочие	Виды работ				
	Работа №1	Работа №2	Работа №3	Работа №4	Работа №5
Иванов	3	6	2	5	11
Петров	1	2	7	11	3
Сидоров	5	12	11	9	1
Егоров	2	4	2	10	5

Задача 4. Составить и решить систему дифференциальных условий Куна – Таккера для следующей задачи квадратичного программирования.

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 + 3)^2 \Rightarrow \min$$

$$x_1 + x_2 = 4,$$

$$x_2 \geq 0.$$

Задача 5. Методом Вульфа свести задачу квадратичного программирования к задаче линейного программирования и применить симплекс-метод.

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^2 + x_2^2 \Rightarrow \min$$

$$2x_1 + x_2 \leq 6,$$

$$x_2 \leq 5,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Задача 6. Решить задачу параметрического программирования графическим методом.

$$\max [(2+t)x_1 + (13-t)x_2]$$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \leq 16, \\ x_1 + x_2 \leq 11, \\ 2x_1 + x_2 \leq 12, \\ x_1, x_2 \geq 0, \\ 0 \leq t \leq 10. \end{cases}$$

Задача 7. Проанализировать проект методом СРМ: построить диаграммы Гантта, составить сетевой граф, найти критический путь (пути) и вычислить продолжительность проекта.

Стадия	Предшествующая стадия	Длительность стадии
A	–	2
B	A	3
C	A	4
D	C	3
E	B	2
F	D,E	5

Ответы:

Задача 1. (1; 0).

Задача 2.

100	0	0	7	93
0	0	0	150	0
0	25	50	93	57
0	175	0	0	0

Задача 3.

0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	0	0	0	1
1	0	0	0	0
0	0	0	1	0

Задача 4. (4; 0; -4).

Задача 5. (2; 0).

Задача 6.

$$t = \begin{cases} [0; 5,5] = \begin{cases} x_0^* = (0; 11), \\ \max F = 143 - 11t, \end{cases} \\ [5,5; 8] = \begin{cases} x_1^* = (1; 10), \\ \max F = 132 - 9t, \end{cases} \\ [8; 10] = \begin{cases} x_2^* = (2; 8), \\ \max F = 108 - 6t. \end{cases} \end{cases}$$

Задача 7.  $L = \{A, C, D, F\}$ ,  $T_L = 14$ .

Критерии оценивания:

Результаты экзамена определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Оценка «отлично» выставляется, если даны правильные ответы на все вопросы четырёх частей билета, на теоретический вопрос дан развернутый ответ и все задачи решены без ошибок.

Оценка «хорошо» выставляется, если дан ответ на теоретический вопрос и верно решены две задачи.

Оценка «удовлетворительно» выставляется, если дан ответ на теоретический вопрос и верно решена одна задача.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если студент дал ответы менее чем по двум частям билета.

#### 4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

Перечень теоретических вопросов (ИОПК-6.1, ИОПК-6.2, ИОПК-6.3):

1. Математическая модель задачи линейного программирования. Задача о производственном плане. Задача о диете. Каноническая форма.
2. Графическая интерпретация задачи линейного программирования.
3. Практический алгоритм симплексного метода. Метод искусственного базиса.
4. Транспортная задача и её свойства. Методы построения исходных опорных планов.
5. Переход к новому опорному плану транспортной задачи. Критерий оптимальности плана транспортной задачи.



6. Задача о назначениях и её свойства. Практический алгоритм венгерского метода.
7. Евклидово пространство. Выпуклые функции и их свойства. Классические задачи оптимизации.
8. Теорема Куна – Таккера. Дифференциальные условия Куна – Таккера и их геометрическая интерпретация.
9. Квадратичное программирование. Метод Вульфа.
10. Одномерная оптимизация. Локализация минимума. Минимизация унимодальных функций. Метод парабол. Метод касательных. Метод Ньютона.
11. Многомерная оптимизация без ограничений. Релаксационные методы. Градиентные методы.
12. Ньютоновские и квазиньютоновские методы многомерной оптимизации.
13. Многомерная оптимизация с ограничениями. Сведение к задаче без ограничений. Общая схема релаксационных методов, учитывающих ограничения.
14. Динамическое программирование. Основные принципы динамического программирования. Функция Беллмана. Уравнение Беллмана.
15. Сетевое планирование и управление. Проект и его сетевая модель. Временной анализ проектов.
16. Анализ проектов со случайными длительностями работ.
17. Предмет теории массового обслуживания. Случайные потоки и их свойства. Простейший поток.
18. Марковские процессы. Система дифференциальных уравнений Колмогорова.

### **Информация о разработчиках**

Вавилов Вячеслав Анатольевич, канд. физ.-мат. наук, доцент, кафедра программной инженерии ТГУ, доцент