

**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)**

Механико-математический факультет

УТВЕРЖДЕНО:
Декан ММФ ТГУ
Л.В.Гензе

Оценочные материалы по дисциплине

Разностные схемы
по направлению подготовки

01.03.01 Математика
02.03.01 Математика и компьютерные науки

Направленность (профиль) подготовки
Основы научно-исследовательской деятельности в области математики
Основы научно-исследовательской деятельности в области математики
и компьютерных наук

Форма обучения
Очная

Квалификация
Бакалавр

Год приема
2023

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
Л.В.Гензе

Председатель УМК
Е.А.Тарасов

Томск – 2023

1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-4 Способен проводить под научным руководством исследование на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности.

ОПК-8 Способен использовать в педагогической деятельности научные знания в сфере математики, механики, компьютерных наук и информатики.

ПК-1 Способен проводить научно-исследовательские разработки по отдельным разделам выбранной темы.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК 4.1 Проводит поиск и обработку научной и научно-технической информации, необходимой для решения исследовательских задач

ИОПК 4.2 Оценивает полученные результаты и формулирует выводы по итогам проведенных исследований

ИОПК 8.1 Демонстрирует способность подготовить конспект или план занятия по теме из области математики, механики, компьютерных наук или информатики.

ИОПК 8.2 Выбирает подходящие источники информации для подготовки конспекта или плана занятия по выбранной теме.

ИПК 1.1 Проводит работы по обработке и анализу научно-технической информации и результатов исследований

ИПК 1.2 Подготавливает планы и программы проведения отдельных этапов научно-исследовательской работы

ИПК 1.3 Проводит отдельные этапы научно-исследовательской работы

2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания

Элементы текущего контроля:

- ТЕСТЫ;

ИОПК 8.2, ИОПК 4.2

1. Выберите правильное решение задачи определения порядка аппроксимации левой конечной разности, аппроксимирующей производную функции u в точке x_j :

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_{x_j} \rightarrow \lambda_x^- u = \frac{u_j - u_{j-1}}{h}.$$

◇ А. $u_{j-1} = u_j - u'_j h + u''_j \frac{h^2}{2} - u'''_j \frac{h^3}{3} + u^{IV}_j \frac{h^4}{4} - \dots$

$$\lambda_x^- u = u'_j - u''_j \frac{h}{2} + u'''_j \frac{h^2}{3} - u^{IV}_j \frac{h^3}{4} = u'_j + O(h)$$

◇ Б. $u_{j-1} = u_j - u'_j h + u''_j \frac{h^2}{2!} - u'''_j \frac{h^3}{3!} + u^{IV}_j \frac{h^4}{4!} - \dots$

$$\lambda_x^- u = u'_j - u''_j \frac{h}{2!} + u'''_j \frac{h^2}{3!} - u^{IV}_j \frac{h^3}{4!} = u'_j + O(h)$$

$$\diamond \text{ В. } u_{j-1} = u_j - u'_j h + u''_j \frac{h^2}{2!} - u'''_j \frac{h^3}{3!} + u^{IV}_j \frac{h^4}{4!} - \dots$$

$$\lambda_x^- u = u'_j - u''_j \frac{h}{2!} + u'''_j \frac{h^2}{3!} - u^{IV}_j \frac{h^3}{4!} = u'_j + O(h^3)$$

$$\diamond \text{ Г. } u_{j-1} = u_j - u'_j h + u''_j \frac{h^2}{2!} - u'''_j \frac{h^3}{3!} + u^{IV}_j \frac{h^4}{4!} - \dots$$

$$\lambda_x^- u = u'_j + u'''_j \frac{h^2}{3!} = u'_j + O(h^2)$$

2. Выберите правильное решение задачи определения порядка аппроксимации разностного оператора, аппроксимирующего производную функции u в точке x_j , при $\sigma = 1/3$:

$$\lambda_x^\sigma u = \sigma \frac{u_{j+1} - u_j}{h} + (1 - \sigma) \frac{u_j - u_{j-1}}{h}.$$

$$\diamond \text{ А. } \lambda_x^{1/3} u = u'_j + u'''_j \frac{h^2}{6} = u'_j + O(h^2).$$

$$\diamond \text{ Б. } \lambda_x^{1/3} u = u'_j - u''_j \frac{h}{2!} + u'''_j \frac{h^2}{3!} - u^{IV}_j \frac{h^3}{4!} = u'_j + O(h).$$

$$\diamond \text{ В. } \lambda_x^{1/3} u = u'_j - u^{IV}_j \frac{h^3}{72} = u'_j + O(h^3).$$

$$\diamond \text{ Г. } \lambda_x^{1/3} u = u'_j - u''_j \frac{h}{6} + u'''_j \frac{h^2}{6} - u^{IV}_j \frac{h^3}{72} = u'_j + O(h).$$

3. Выберите из представленных ниже разностных уравнений те, которые являются явной разностной схемой, аппроксимирующей дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 5 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x; \quad u = u(t, x); \quad x \in [0; 1].$$

$\diamond \text{ А. } \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = 5 \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} + h(j-1)$	$\diamond \text{ Г. } \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = 5 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} + n \cdot \Delta t$
$\diamond \text{ Б. } \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} = 5 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} + n \cdot \Delta t$	$\diamond \text{ Д. } \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = 5 \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2}$
$\diamond \text{ В. } \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = 5 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} + nh$	$\diamond \text{ Е. } \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = 5 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} + h(j-1)$

. Выберите из представленных ниже разностных соотношений те, которые являются неявной разностной схемой, аппроксимирующей дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 3t; \quad u = u(t, x); x \in [0; 1].$$

◇ А.	$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = 4 \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} - 3n \cdot \Delta t$	◇ Г.	$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = 4 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} - 3h(j-1)$
◇ Б.	$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} = 2 \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2}$	◇ Д.	$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = 4 \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} - 3n \cdot \Delta t$
◇ В.	$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = 4 \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2h} - 3n \cdot \Delta t$	◇ Е.	$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = 4 \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} - 3h(j-1)$

Ключи 1Б), 2Б), 3Е), 4Д).

РЕФЕРАТЫ;

ИОПК 8.2, ИОПК 8.1, ИОПК 4.2

1. Устойчивые и неустойчивые алгоритмы. Пояснить.
2. Необходимый спектральный признак устойчивости. Сформулировать.
3. Нормальные матрицы. Дать определение.
4. Два определения устойчивости разностной схемы и условия их эквивалентности.
5. Теорема сходимости. Сформулируйте.
6. Сетки и сеточные функции. Нормы сеточных функций пространства U_h и F_h .
7. Примеры приведения к канонической форме.
8. Достаточный признак устойчивости, как равномерная ограниченность норм степеней оператора R_h .
9. Порядок разностного уравнения. Пояснить на примере.
10. Общее решение однородного разностного уравнения второго порядка.
11. Простейшие разностные производные.
12. Примеры разностных схем для задачи Коши.
13. Сходимость метода Эйлера.
14. О корректном задании начальных условий для разностного уравнения второго порядка.
15. Примеры исследования на устойчивость для системы двух ОДУ первого порядка
16. Достаточный признак устойчивости, как равномерная ограниченность норм степеней оператора R_h .
17. Сходимость метода Эйлера и его модификаций
18. Определение хорошей обусловленности для трехдиагональных систем
19. Основное обозначение и понятия. ТРС.
20. Сетки и сеточные функции. Одномерный и двумерный случаи. Пояснить на примере.
21. Равномерные и неравномерные сетки. Примеры.
22. Примеры разностной аппроксимации простейших дифференциальных операторов.

$$23. \quad Lv \equiv \frac{dv}{dt};$$

$$24. \quad Lv \equiv \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}; \quad v = v(x, t).$$

25. Оценка погрешности аппроксимации.

26. О погрешности аппроксимации на сетке. Определения. Проиллюстрировать на примере.

2. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

Тест1. Какое дифференциальное уравнение аппроксимирует разностная схема

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2}$$

и с каким порядком по переменной x ?

Ответ: а) $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, порядок первый

в) $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, порядок второй.

Ключи а)

Тест2.

Какое количество операций требуется для разрешения неявной разностной схемы для задачи теплопроводности тонкого стержня при переходе с n слоя на $n+1$? $h=(b-a)/N$.

Ответ: а) N ; б) N^2 ; в) $8N$.

Ключи в).

Тест3.

Аппроксимация и устойчивость разностной схемы зависимые понятия или независимые?

Ответ: а) зависимые; б) независимые.

Ключи б).

Информация о разработчиках

1. Берцун Владимир Николаевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной математики и компьютерного моделирования механико-математического факультета.
2. Михайлов Михаил Дмитриевич-старший преподаватель кафедры вычислительно математики и компьютерного моделирования механико-математического факультета.