

Сведения о выполненных работах и
полученных научных результатах в 2023 году

по проекту «**Эффективные статистические методы анализа
эпидемиологических моделей**»,
поддержанному Российским научным фондом

Соглашение № 22-21-00302

Руководитель: Воробейчиков Сергей Эрикович, д-р физ.-мат. наук
Пергаменщиков Сергей Маркович, д-р физ.-мат. наук

Проводились исследования модели Кокса–Ингерсолла–Росса на основе гарантированных последовательных методов оценивания. Разработаны последовательные процедуры оценивания, гарантирующие фиксированную неасимптотическую точность оценивания как для скалярных параметров, так и для двумерного параметра. При оценивании скалярных параметров выяснилось, что существуют такие параметрические области оценивания, в которых классические оценки максимального правдоподобия не могут быть определены на любом временном интервале фиксированной длины, потому что стохастический интеграл в таких областях не существует. В то время как в последовательной версии стохастический интеграл определен корректно и оценки определяются и имеют неасимптотическое гауссовское распределение, обладают гарантированной неасимптотической среднеквадратической точностью оценивания. Этот прорывной результат в статистике случайных процессов, доказывающий преимущество последовательных методов над классическими непоследовательными в неасимптотической постановке, имеет важное значение как для теоретических и прикладных исследований. Определяющий вывод заключается в том, что на практике, при анализе эпидемиологической обстановки опасно пользоваться обычными классическими непоследовательными статистическими методами, как например, метод максимального правдоподобия на временном интервале фиксированной длины, так как можно получить ошибочные статистические выводы. Для оценивания многомерных параметров в данной модели был развит специальный двух-ступенчатый последовательный метод оценивания, гарантирующий неасимптотическую среднеквадратическую точность. Установлено, что асимптотически среднее время оценивания обратно пропорционально среднеквадратической точности оценивания, т.е. построенные процедуры оценивания требуют минимальное необходимое число наблюдений для достижения заданной точности. Получена нижняя граница для моделей Кокса – Ингерсолла – Росса, на основании которой установлена асимптотическая оптимальность разработанных последовательных процедур в классе всех последовательных и непоследовательных оценок с заданным средним временем оценивания. Поэтому в данных моделях единственная возможность для проведения качественного статистического анализа и принятия оптимальных статистических решений - это пользоваться последовательными гарантированными методами, развитыми в проекте, а иначе повышаются риски принятия ошибочных решений по эпидемиологической ситуации.

Далее разработаны эффективные усеченные последовательные методы оценивания для непараметрических авторегрессионных временных рядов, используемых для качественного анализа эпидемиологической обстановки. Получены специальные нижние границы на основе неравенства Ван Триса и, используя точные оракульные неравенства и взвешенный метод наименьших квадратов, показано, что для построенной процедуры выбора модели верхняя граница ее робастного риска асимптотически совпадает с полученной нижней оценкой без использования свойств регулярности неизвестной функции. Разработанная в проекте процедура является эффективной в адаптивной постановке по отношению к робастному риску, сохраняет свойство эффективности при изменении вероятностных характеристик неконтролируемых случайных шумов в наблюдениях в достаточно широких пределах.

Для решения задач раннего выявления эпидемий использованы методы последовательного анализа. При этом начало распространения эпидемии определяется моментом превышения вероятности заражения определенного порога. Необходимо как можно скорее определить этот критический момент. В проекте такие задачи решены для статистических эпидемиологических моделей с зависимыми наблюдениями, представленными цепями Маркова. Разработан новый оптимальный усеченный последовательный метод обнаружения для байесовских рисков, основанный на равномерном априорном распределении момента изменения величины вероятности заражения в пределах временного интервала $[0, N]$, где $N \geq 1$ - фиксированное известное число. При этом в отличие от предыдущего этапа предполагается, что распределение наблюдений после начала эпидемий неизвестно, т.е. заранее неизвестен уровень вероятности заражения, при котором начнется эпидемия.

Затем в проекте для анализа распространения эпидемий разрабатывались эффективные процедуры непараметрической идентификации в стохастических SIR моделях, динамика которых определяется стохастическими дифференциальными уравнениями, построенными на основе скачкообразных процессах Леви и диффузионных процессах. Процедуры оценивания строились на основе проекционного взвешенного метода наименьших квадратов Пинскера с коэффициентами, минимизирующими асимптотический квадратический риск. На основе методов, развитых Пчелинцевым, Пергаменщиковым и Повзун (2022) для моделей Леви, были получены точные нижние границы для асимптотических квадратических рисков и построены эффективные в минимаксном смысле процедуры оценивания в эпидемиологических моделях для неизвестных функций из соболевского эллипса с геометрически растущими коэффициентами. При этом минимаксная скорость сходимости получилась равной параметрической с точностью до логарифмически растущего коэффициента, что означает супер-эффективное оценивание. Решена задача статистического оценивания по дискретным данным функции распространения эпидемии в стохастической SIR модели, в которой динамика инфицирования определяется эргодическим диффузионным процессом с неизвестным коэффициентом диффузии. Для оценивания функции сноса

диффузионного процесса предложена улучшенная процедура, обладающая более высокой скоростью сходимости, чем обычные оценки МНК. Разработаны статистические алгоритмы для практической реализации построенных в проекте процедур непараметрической идентификации и по методу Монте–Карло проведены численные моделирования, которые на модельных примерах подтвердили справедливость теоретических результатов.

Ссылки на интернет-ресурсы:

<https://hal.science/hal-03890891v1/file/Ar-Br-Pe-AsEff-08-12-2022.pdf>

<https://doi.org/10.1080/07474946.2023.2285777>

<https://hal.science/hal-03936795>

<https://elibrary.ru/item.asp?id=54802067>

<https://elibrary.ru/item.asp?id=54631252>